УДК 517.929

ПРИЗНАК ОТСУТСТВИЯ СИЛЬНО НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М.С. Белокурский[1], **А.К. Деменчук**[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Институт математики НАН Беларуси, Минск*

THE CONDITION OF THE ABSENCE OF STRONGLY IRREGULAR PERIODIC SOLUTIONS OF THE SYSTEM OF TWO LINEAR DISCRETE PERIODIC EQUATIONS

M.S. Belokursky[1], **A.C. Demenchuk**[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Institute of Mathematics of NAS of Belarus, Minsk*

Получено необходимое условие существования сильно нерегулярных периодических решений системы двух линейных дискретных периодических уравнений.

Ключевые слова: *сильно нерегулярное периодическое решение, линейная дискретная система, периодическое уравнение.*

The necessary condition under which the system of two linear discrete periodic equations has strongly irregular periodic solutions was obtained.

Keywords: *strongly irregular periodic solution, linear discrete system, periodic equation.*

Введение

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ – соответственно множества натуральных, целых и действительных чисел, $z=(z_n)=(z(n))$ $(n\in\mathbb{N})$ – l-мерная векторная функция (последовательность), определенная на $\mathbb{N}$ со значениями в $\mathbb{R}^l$, т. е. $z:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^l$. Множество таких последовательностей обозначим через S^l. Следуя [1, с. 69] введем следующее

***Определение* 0.1.** Последовательность $z\in S^l$ называется периодической с периодом $\omega\in\mathbb{N}$ (ω-периодической), если для любого $n\in\mathbb{N}$ выполняется равенство $z_{n+\omega}=z_n$.

Естественно, что если число ω – период последовательности z, то его кратные также будут периодами этой последовательности, т. е. для любых $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$, $n+m\omega>0$ имеем $z(n+m\omega)=z(n)$. Поэтому в дальнейшем под периодом последовательности, как правило, будем понимать наименьший из периодов. В таком случае, в частности, всякая постоянная скалярная последовательность будет 1-периодической. Множество l-мерных ω-периодических последовательностей обозначим через PS_ω^l.

Периодические последовательности при определенных условиях могут быть решениями дискретных (разностных) систем. Проблеме существования и построения периодических решений дискретных уравнений и систем посвящено достаточно большое количество работ [1]–[4] и др. В указанных работах в основном изучались решения, период которых совпадает с периодом самого уравнения. Хотя полученные в этом направлении результаты во многом аналогичны соответствующим результатам для обыкновенных дифференциальных уравнений, тем не менее, в некоторых случаях имеются значительные различия. Отметим одно из них.

1 Пример дискретного уравнения и дискретной линейной системы с сильно нерегулярным периодическим решением

Как известно [5], [6] и др., нелинейное скалярное периодическое обыкновенное дифференциальное уравнение не имеет отличных от постоянных периодических решений таких, что периоды решения и уравнения несоизмеримы. Более того, Н.П. Еругин в работе [7] доказал, что такого рода решения отсутствуют у линейной нестационарной периодической системы двух уравнений. Представляется интересным исследовать подобные вопросы для дискретных уравнений и систем. С этой целью рассмотрим систему

$$x_{n+1}=X(x_n,y_n,n),\ \ y_{n+1}=Y(x_n,y_n,n),\quad n\in\mathbb{N},\ \operatorname{col}(x,y)\in S^2, \tag{1.1}$$

правая часть которой является ω-периодической, т. е. существует такое наименьшее $\omega\in\mathbb{N}$, что для любого фиксированного $n_0\in\mathbb{N}$ выполняются равенства

$$X(x_{n_0}, y_{n_0}, n+\omega) = X(x_{n_0}, y_{n_0}, n),$$
$$Y(x_{n_0}, y_{n_0}, n+\omega) = Y(x_{n_0}, y_{n_0}, n)$$

при всех $n \in \mathbb{N}$. Далее под периодом системы вида (1.1) будем понимать период её правой части.

По аналогии с [8] введем следующее

***Определение* 1.1.** Периодическое решение с периодом Ω системы (1.1) такое, что числа ω и Ω взаимно просты, будем называть сильно нерегулярным.

Предварительно отметим, что в работе [9] А.В. Ласунским показано следующее: при определенных условиях скалярное дискретное уравнение может допускать сильно нерегулярное периодическое решение. Действительно, пусть σ – произвольное нечетное число и $(h_n) \in PS^1_\sigma$. Возьмем дискретное уравнение

$$x_{n+1} = -x_n - (1 - x_n^2)h_n. \qquad (1.2)$$

Уравнение (1.2) имеет решение

$$x_n = (-1)^n \qquad (1.3)$$

с периодом $\Omega = 2$. Поскольку числа σ и Ω взаимно просты, то согласно определению 1.1 периодическое решение (1.3) уравнения (1.2) является сильно нерегулярным.

Таким образом, теорема Массера [5] об отсутствии сильно нерегулярных периодических решений у скалярного обыкновенного уравнения для разностных уравнений, вообще говоря, для дискретных уравнений полного аналога не имеет. В связи с этим возникает задача реализации аналога упомянутой теоремы Массера для более узких классов уравнений. В работе [10] получен аналог упомянутой теоремы Массера для линейных разностных уравнений. В частности, показано, что скалярное линейное однородное периодическое нестационарное дискретное уравнение первого порядка не имеет сильно нерегулярных периодических решений, отличные от постоянных.

Вполне естественно поставить вопрос для двумерного случая: имеет ли место аналог отмеченной выше теоремы Н.П. Еругина в двумерном случае том случае, когда система (1.1) линейная

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n y_n, \; y_{n+1} = c_n x_n + d_n y_n, \; n \in \mathbb{N}, \; x \in S^1, \; y \in S^1, \qquad (1.4)$$

где матрица коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

является ω-периодической, т. е. $A(n+\omega) = A(n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и хотя бы один из её элементов отличен от постоянной? Как показывает следующий пример, ответ на этот вопрос, вообще говоря, является отрицательным. Действительно, возьмем линейную дискретную систему

$$x_{n+1} = -x_n + b_n y_n, \; y_{n+1} = d_n y_n, \; n \in \mathbb{N}, \; (b_n) \in PS^1_\omega, \; (d_n) \in PS^1_\omega, \qquad (1.5)$$

где хотя бы один из коэффициентов (b_n), (d_n) отличен от постоянного, т. е. $\omega \geq 2$, и наибольший общий делитель чисел 2 и ω равен 1. Система (1.5) имеет периодическое решение

$$x_n = (-1)^n, \; y_n = 0, \; n \in \mathbb{N}. \qquad (1.6)$$

Период решения (1.6) является взаимно простым с периодом системы (1.5).

Таким образом, теорема Н.П. Еругина об отсутствии у линейной системы двух дифференциальных уравнений отличного от постоянного периодического решения, период которого несоизмерим с периодом коэффициентов самой системы, в общем случае аналога для дискретных систем не имеет. Поэтому целью настоящей заметки является выделение классов линейных двумерных дискретных систем, у которых отсутствуют сильно нерегулярные периодические решения.

2 Необходимое условие существования сильно нерегулярных периодических решений системы двух линейных дискретных периодических уравнений

В дальнейшем будем говорить, что столбцы $H^{(1)}(n), \ldots, H^{(k)}(n)$ некоторой матрицы $H(n)$, $n \in \mathbb{N}$ линейно независимы, если тождество

$$\alpha_1 H^{(1)}(n) + \ldots + \alpha_k H^{(k)}(n) \equiv 0, \quad n \in \mathbb{N}, \; \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$$

выполняется в том и только том случае, когда $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$. Через $\mathrm{rank_{col}}\, H$ обозначим столбцовый ранг матрицы $H(n)$, $n \in \mathbb{N}$, т. е. наибольшее число её линейно независимых столбцов.

Допустим, что система (1.4) имеет сильно нерегулярное Ω-периодическое решение

$$x_n = \varphi_n, \; y_n = \psi_n, \; \varphi(n+\Omega) = \varphi(n), \; \psi(n+\Omega) = \psi(n), \; n \in \mathbb{N}, \qquad (2.1)$$

где числа ω и Ω взаимно просты и $\Omega \geq 2$. Это означает, что выполняются тождества

$$\varphi_{n+1} \equiv a_n \varphi_n + b_n \psi_n, \quad \psi_{n+1} \equiv c_n \varphi_n + d_n \psi_n, \; n \in \mathbb{N}. \qquad (2.2)$$

Так как тождества (2.2) справедливы для всех $n \in \mathbb{N}$, то верны также тождества

$$\varphi_{n+1+\Omega} \equiv a_{n+\Omega} \varphi_{n+\Omega} + b_{n+\Omega} \psi_{n+\Omega}, \quad \psi_{n+1} \equiv c_{n+\Omega} \varphi_{n+\Omega} + d_{n+\Omega} \psi_{n+\Omega}, \; n \in \mathbb{N}. \qquad (2.3)$$

В силу Ω-периодичности функций φ_n, ψ_n тождества (2.3) принимают следующий вид

$$\varphi_{n+1} \equiv a_{n+\Omega} \varphi_n + b_{n+\Omega} \psi_n, \quad \psi_{n+1} \equiv c_{n+\Omega} \varphi_n + d_{n+\Omega} \psi_n, \; n \in \mathbb{N}. \qquad (2.4)$$

Из тождеств (2.2), (2.4) вытекают тождества

$$(a_{n+\Omega} - a_n)\varphi_n + (b_{n+\Omega} - b_n)\psi \equiv \equiv p^{(11)}(n)\varphi_n + p^{(12)}(n)\psi_n \equiv 0,$$
$$(c_{n+\Omega} - c_n)\varphi_n + (d_{n+\Omega} - d_n)\psi \equiv \equiv p^{(21)}(n)\varphi_n + p^{(22)}(n)\psi_n \equiv 0, \; n \in \mathbb{N}. \qquad (2.5)$$

Образуем матрицу

$$P(n)=\begin{bmatrix} p^{(11)}(n) & p^{(12)}(n) \\ p^{(21)}(n) & p^{(22)}(n) \end{bmatrix},\ n\in\mathbb{N}.$$

Обозначим через $P^{(j)}(n),\ n\in\mathbb{N},\ j=1,2$ столбцы этой матрицы. Так как $P(n)=A(n+\Omega)-A(n)$ и $A(n+\omega)\equiv A(n),\ \ n\in\mathbb{N},$ то матричная функция P является ω-периодической.

Покажем, что столбцы $P^{(1)}(n)$ и $P^{(2)}(n)$ матрицы $P(n),\ \ n\in\mathbb{N}$ линейно зависимы, т. е. найдутся такие $\alpha_0,\beta_0\in\mathbb{R},\ \ \alpha^2+\beta^2\neq 0,$ что $\alpha_0 P^{(1)}(n)+\beta_0 P^{(2)}(n)\equiv 0,\ n\in\mathbb{N}.$ Согласно предположению хотя бы одна из функций $x=\varphi,$ $y=\psi$ – нестационарна. Поэтому существует $n_0\in\mathbb{N},$ для которого выполняется неравенство $\varphi_{n_0}^2+\psi_{n_0}^2\neq 0.$ Из тождеств (2.5) вытекает справедливость равенств

$$\varphi_{n_0+m\Omega}P^{(1)}(n_0+m\Omega)+\psi_{n_0+m\Omega}P^{(2)}(n_0+m\Omega)=0,\quad m\in\mathbb{N},$$

из которых на основании Ω-периодичности функций $\varphi,\ \psi$ получаем равенства

$$\varphi_{n_0}P^{(1)}(n_0+m\Omega)+\psi_{n_0}P^{(2)}(n_0+m\Omega)=0,\quad m\in\mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Так как матрица P имеет период $\omega,$ то равенства (2.6) можно записать в виде

$$\varphi_{n_0}P^{(1)}(n_0+m\Omega+k\omega)+ +\psi_{n_0}P^{(2)}(n_0+m\Omega+k\omega)=0,\ \ k,m\in\mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Поскольку k,m – произвольные натуральные числа и $\text{НОД}(\omega,\Omega)=1,$ то для любого $n\in\mathbb{N}$ найдутся такие $k,m,$ что выполняется равенство $n=n_0+m\Omega+k\omega.$ Поэтому при $k,m\in\mathbb{N}$ имеем $P^{(j)}(n_0+m\Omega+k\omega)=P^{(j)}(n),\ \ n\in\mathbb{N},\ j=1,2.$ Следовательно, из равенств (2.7) вытекает тождество

$$\varphi_{n_0}P^{(1)}(n)+\psi_{n_0}P^{(2)}(n)=0,\ \ n\in\mathbb{N}. \tag{2.8}$$

В силу того, что $\varphi_{n_0}^2+\psi_{n_0}^2\neq 0,$ тождество (2.8) означает, что столбцы матрицы $P(n),\ \ n\in\mathbb{N}$ линейно зависимы.

Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Если система* (1.4) *имеет отличное от стационарного периодическое решение такое, что период решения взаимно прост с периодом системы, то столбцы матрицы* $P(n),$ $n\in\mathbb{N}$ *линейно зависимы.*

Следствие. *Если матрица* $P(n),\ \ n\in\mathbb{N}$ *имеет полный столбцовый ранг, т. е.* $\text{rank}_{\text{col}}P=2,$ *то нестационарные сильно нерегулярные периодические решения у системы* (1.4) *отсутствуют.*

***Замечание* 2.1.** Дискретная периодическая система (1.5) имеет сильно нерегулярное 2-периодическое решение (1.6). Матрица $P(n),$ $n\in\mathbb{N}$ для этой системы имеет вид

$$P(n)=\begin{bmatrix} 0 & b(n+2)-b(n) \\ 0 & d(n+2)-d(n) \end{bmatrix},\ \ n\in\mathbb{N}. \tag{2.9}$$

Столбцы этой матрицы линейно зависимы и её столбцовый ранг в общем случае равен единице.

***Замечание* 2.2.** В общем случае линейная зависимость столбцов и строк дискретной матрицы не эквивалентны. Это, в частности, подтверждается примером (2.9), где строки матрицы могут быть линейно зависимыми только при

$$b(n+2)-b(n)\equiv l(d(n+2)-d(n)),\ \ l\in\mathbb{R}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Agarwal*, *R.P.* Difference equations and inequalities: theory, methods and applications / R.P. Agarwal. – New York: Marcel Dekker, 1992. – 971 p.

2. *Agarwal*, *R.F.* Periodic Solutions of First Order Linear Difference Equations / R.F. Agarwal, J. Popenda // Math. Comput. Model. – 1995. – Vol. 22, № 1. – P. 11–19.

3. *Janglajew*, *K.R.* Periodicity of solutions of nonhomogeneous linear difference equations / K.R. Janglajew, E.L. Schmeidel // Advances in Difference Equations. – 2012. – Vol. 2012, № 1. – P. 195–205.

4. *Elaydi*, *S.* An introduction to difference equations / S. Elaydi // New York: Springer, 2005. – 539 p.

5. *Massera*, *J.L.* Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales / J.L. Massera // Bol. de la Facultad de Ingenieria. – 1950. – Vol. 4, № 1. – P. 37–45.

6. *Курцвейль*, *Я.* О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Я. Курцвейль, О. Вейвода // Чехосл. матем. журнал. – 1955. – Т. 5, № 3. – С. 362–370.

7. *Еругин*, *Н.П.* О периодических решениях линейной однородной системы дифференциальных уравнений / Н.П. Еругин // Докл. АН БССР. – 1962. – Т. 6, №7. – С. 407–410.

8. *Деменчук*, *А.К.* Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления. / А.К. Деменчук. – Lambert Academic Publishing. Saarbrücken, 2012. – 186 с.

9. *Ласунский*, *А.В.* О периоде решений дискретного периодического логистического уравнения / А.В. Ласунский // Труды Карельского научного центра РАН. – 2012. – № 5. – С. 44–48.

10. *Деменчук*, *А.К.* О сильно нерегулярных периодических решениях линейного однородного дискретного уравнения первого порядка / А.К. Деменчук // Доклады НАН Беларуси. – 2018. – Т. 62, № 3. – С. 263–267.

Работа выполнена в рамках Отдельного проекта фундаментальных и прикладных научных исследований НАН Беларуси «Исследование свойств спектров дискретных систем при возмущениях их коэффициентов».

Поступила в редакцию 16.07.18.